

Teoretická část - 27.1.2022

1. (a) Definujte Gâteauxovu derivaci ve směru, Gâteauxovu derivaci a stacionární bod funkcionálu (2, 5 bodu).
 - (b) Zformulujte základní lemma variačního počtu a větu o Euler-Lagrangeově rovnici (2 body).
 - (c) Větu o Euler-Lagrangeově rovnici dokažte (2 body).
 - (d) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro Banachův prostor $(X, \|\cdot\|)$ a funkcionál $F : X \rightarrow \mathbb{R}$.
 - i. Je-li $x \in X$ stacionární bod F , potom je x stacionární bod F^2 .
 - ii. Je-li $x \in X$ stacionární bod F , potom je x stacionární bod $\sin(F)$.
- Vše řádně zdůvodněte (1, 5 bodu).

2. (a) Definujte Lebesgueovsky měřitelnou množinu, Lebesgueovu míru, σ -algebru a míru (3 body).
(b) Zformulujte větu o limitě integrálu závislého na parametru a větu o derivaci integrálu závislého na parametru (3 body).
(c) Uvažme následující systém podmnožin $\mathbb{R}$:

$$\Sigma = \{A \subset \mathbb{R} : A = F \cup G, \text{ kde } G \text{ je otevřená a } F \text{ je uzavřená}\}.$$

Je $(\mathbb{R}, \Sigma)$ měřitelný prostor? Vše řádně zdůvodněte (1 bod).

- (d) Uvažme množinu $X = \{1, 2, 3\}$. Nalezněte všechny σ -algebry na X . Vše řádně zdůvodněte (1 bod).

3. (a) Definujte křivku, regulární křivku a opačnou křivku. Definujte křivkový integrál 1. a 2. druhu (4 body).
- (b) Zformulujte a dokažte větu o výpočtu křivkového integrálu 2. druhu pomocí potenciálu (2 body).
- (c) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3$, a zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x^3, y^3)$.

i. Existuje regulární C^1 křivka $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, že

$$\int_{\langle \gamma \rangle} f \, ds < \int_{\langle \ominus \gamma \rangle} f \, ds.$$

ii. Existuje regulární C^1 křivka $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, že

$$\int_{\langle \gamma \rangle} f \, ds = \int_{\langle \ominus \gamma \rangle} f \, ds.$$

iii. Existuje regulární C^1 křivka $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, že

$$\int_{\langle \gamma \rangle} F \cdot \vec{ds} < \int_{\langle \ominus \gamma \rangle} F \cdot \vec{ds}.$$

iv. Existuje regulární C^1 křivka $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, že

$$\int_{\langle \gamma \rangle} F \cdot \vec{ds} = \int_{\langle \ominus \gamma \rangle} F \cdot \vec{ds}.$$

(2 body)